Monodromy Preserving Deformationのソリトン理論への応用 (完全積分可能な非線型系の古典論と量子論)

上野, 喜三雄

数理解析研究所講究録
375巻 1980年 87-100

Monodromy Preserving Deformation のソリトン理論への応用

京大・数理研 上野喜三雄

§0 文献 [1], [2], において，モノドロミー保存変形の一般論，及び，そのソリトン理論への応用の端緒が切り開かれ，最近では，京大の三輪氏，神保氏らの精力的研究により，それらの一般論（完成された意味での!!）が構築されるに至った。(cf. [4].)　この小論においては，個別的具体例を通して，モノドロミー保存変形がソリトン理論（又は，*isospectral deformation* と言ってもよい）に，如何に係るかを解説したいと思う。

§1. 我々が，対象とする非線型方程式は，次の二つのものである。

(Pohlmeyer-Lund-Regge system，略してPLR)

$$(1.1)\quad u_{\xi\eta} - \frac{v_\xi v_\eta \sin(\frac{u}{2})}{2\cos^3(\frac{u}{2})} + \sin u = 0,$$

$$v_{\xi\eta} + \frac{u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi}{\sin u} = 0$$

（non-linear Schrödinger 方程式　略してNLS）

(1.2)　$u_\eta - i u_{\xi\xi} - 2i|u^2|u = 0$

我々の一つの目標は，PLR，NLSの multi-soliton 解が，モノドロミー保存変形により統制され得ることを示すことにある。そして，第二の目標は，それらの特殊解のもつハミルトニアン構造を明らかにすることである。この稿では，第一の問題について論じることにする。

PLR，NLSは，次の線型微分方程式の積分可能条件として得られることが知られている。（[ ]，[ ]，[ ]）

（PLRの場合）

(1.3)　$\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - i\begin{bmatrix} & -a^* \\ -a & \end{bmatrix} - \frac{ix}{2}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\right)Y = 0,$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{ix^{-1}}{2}\begin{bmatrix} \cos u & \exp(-iw)\sin u \\ \exp(iw)\sin u & -\cos u \end{bmatrix}\right)Y = 0,$$

ただし，$(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$，$x\in\mathbb{C}$，$a = i(\exp(iw)\sin u)/2\cos u$

（NLSの場合）

(1.4)　$\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - ix\begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & -u \\ u^* & \end{bmatrix}\right)Y = 0,$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta} - x^2\begin{bmatrix}-2i & \\ & 2i\end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} & -2u \\ 2u^* & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i|u|^2 & -iu_\xi \\ -iu_\xi^* & -i|u|^2\end{bmatrix}\right)Y = 0$$

ただし，$(\xi, \eta)\in\mathbb{R}^2$, $x\in\mathbb{C}$ である。

(1.3), (1.4)において，$*$は複素共役を示す。次に，伊達氏によるNソリトン解の直接構成法（[5], [6]）を，PLRとNLSの場合について，解説してみよう。

まず，我々は，線型方程式(1.3), (1.4)の解を次の手続きで，構成する。

(i) 2×2行列 $Y(x,\xi,\eta)$ は，次の型をしているとする。

(1.5) $\quad Y(x,\xi,\eta) = \hat{Y}(x,\xi,\eta)\, x^N \begin{bmatrix} e^{\theta} & \\ & e^{-\theta}\end{bmatrix}$

where $\quad \hat{Y}(x,\xi,\eta) = I + \sum_{j=1}^{N} Y_j(\xi,\eta)\, x^{-j}$

$$Y_j(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} y_{1,N-j}(\xi,\eta) & y^*_{2,N-j}(\xi,\eta) \\ -y_{2,N-j}(\xi,\eta) & y^*_{1,N-j}(\xi,\eta)\end{bmatrix}$$

(1.3) の場合，$\theta = \frac{i}{2}(\xi x + \eta x^{-1})$, (1.4)の場合，$\theta = -i(2\eta x^2 + \xi x)$

(ii)さらに，$Y(x,\xi,\eta)$は，次の退化条件を満しているとせよ。

(1.6). $\quad Y(\alpha_j,\xi,\eta)\begin{bmatrix}1 \\ -c_j\end{bmatrix} = 0$, $Y(\alpha_j^*,\xi,\eta)\begin{bmatrix}c_j^* \\ 1\end{bmatrix} = 0$, $j=1,\cdots,N$

ただし，α_j $(j=1,\cdots,N)$は，複素定数で，$\alpha_j\neq\alpha_k$ *for* $j\neq k$, $\alpha_j^*\neq\alpha_k$ *for any* j, k であるとする。又，c_j $(j=1,\cdots,N)$は，0ではない複素定数とする。(1.6) は，次の一次方程式と同値であることは，容易に確認される。

(1.7) $\quad W\mathbf{y} = -a_N, \qquad W\mathbf{y}' = -a'_N$

ただし，

(1.8) $\quad W = (a_0, \cdots, a_{N-1}, a'_0, \cdots, a'_{N-1})$

$$a_\ell = {}^t(\alpha_1^\ell e(\alpha_1), \cdots, \alpha_N^\ell e(\alpha_N), C_1^*\alpha_1^{*\ell} e(\alpha_1^*), \cdots, C_N^*\alpha_N^{*\ell} e(\alpha_N^*))$$

$$a'_\ell = {}^t(-C_1\alpha_1^\ell e(\alpha_1)^{-1}, \cdots, -C_N\alpha_N^\ell e(\alpha_N)^{-1}, \alpha_1^{*\ell} e(\alpha_1^*)^{-1}, \cdots, \alpha_N^{*\ell} e(\alpha_N^*)^{-1})$$

(1.3)の場合，$e(\alpha) = \exp(\frac{i}{2}(\xi\alpha + \eta\alpha^{-1}))$，(1.4)の場合，$e(\alpha) = \exp(-2i\eta\alpha^2 - i\xi\alpha)$

$$\mathbf{y} = {}^t(y_{1,0}, \cdots, y_{1,N-1}, y^*_{2,0}, \cdots, y^*_{2,N-1})$$

$$\mathbf{y}' = {}^t(-y_{2,0}, \cdots, -y_{2,N-1}, y^*_{1,0}, \cdots, y^*_{1,N-1})$$

従って，$\det W$ が恒等的に 0 でなければ，(i)と(ii)の条件によって，$Y(x,\xi,\eta)$ が一意的に定まることは，明らかであろう。そして，我々は，次の命題を得る。

<u>命題</u>．(伊達[6]) ((1.3)の場合) $Y(x,\xi,\eta)$ は，次の微分方程式を満たす。

(1.9) $\quad dY = \Omega Y$

ただし，d は，ξ と η に関する外微分であり，(この節においては，d は，ξ と η に関する外微分とする。) Ω は，次の 1-form とする。

(1.10) $$\Omega = \left(\frac{ix}{2}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} & -y^*_{2,N-1} \\ -y_{2,N-1} & \end{bmatrix}\right)d\xi$$

$$+\frac{i x^{-1}}{2}(|y_{1,0}|^2+|y_{2,0}|^2)^{-1}\begin{bmatrix}|y_{1,0}|^2-|y_{2,0}|^2 & -2y_{1,0}y_{2,0}^* \\ -2y_{1,0}^*y_{2,0} & |y_{2,0}|^2-|y_{1,0}|^2\end{bmatrix}d\eta$$

それ故，$a=y_{2,N-1}$，$\cos u=(|y_{1,0}|^2-|y_{2,0}|^2)(|y_{1,0}|^2-|y_{2,0}|^2)^{-1}$，$\exp(iw)\sin u=-2y_{1,0}^*y_{2,0}(|y_{1,0}|^2+|y_{2,0}|^2)^{-1}$という同一視を行えば，$Y(x,\xi,\eta)$は，(1.3)の解である。そして，このとき，$u=\arccos\{(|y_{1,0}|^2-|y_{2,0}|^2)(|y_{1,0}|^2+|y_{2,0}|^2)^{-1}\}$，$v=-i\log(y_{2,0}y_{2,0}^{*-1})+v_0$，($v_0\in\mathbb{R}$)という函数の組は，PLRのN-ソリトン解である。

((1.4)の場合) $Y(x,\xi,\eta)$は，次の微分方程式を満す。

(1.11) $dY=\Omega Y$

(1.12)
$$\Omega=\left(ix\begin{bmatrix}-1 & \\ & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} & 2iy_{2,N-1}^* \\ 2iy_{2,N-1} & \end{bmatrix}\right)d\xi$$
$$+\left(x^2\begin{bmatrix}-2i & \\ & 2i\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix} & 4iy_{2,N-1}^* \\ 4iy_{2,N-1} & \end{bmatrix}\right.$$
$$\left.+\begin{bmatrix}4i|y_{2,N-1}|^2 & 4iy_{2,N-1}^*-4iy_{1,N-1}^*y_{2,N-1}^* \\ 4iy_{2,N-1}-4iy_{1,N-1}y_{2,N-1} & 4i|y_{2,N-1}|^2\end{bmatrix}\right)d\eta$$

従って，$u=-2iy_{2,N-1}^*$，$u_\xi=-4y_{2,N-1}^*+4y_{1,N-1}^*y_{2,N-1}^*$という同一視のもとに，$Y(x,\xi,\eta)$は(1.4)の解であり，$u=-2iy_{2,N-1}^*$は，NLSのN-ソリトン解である。

PLRとNLSのN-ソリトン解をモノドロミー保存変形と関連付ける為に，上記の$Y(x,\xi,\eta)$の満すべき，x-方程式を求めよ

う。$Y(x,\xi,\eta)$の型から，(1.3)の場合，$x=\infty, 0$が1級の不確定特異点，(1.4)の場合，$x=\infty$が2級の不確定特異点となることは明らかであるが，$\det Y(x,\xi,\eta)=\prod_{j=1}^{N}(x-\alpha_j)(x-\alpha_j^*)$であるから$x=\alpha_j, \alpha_j^*$ $(j=1,\cdots,N)$も方程式の特異点として現われる。

実際，$Y(x,\xi,\eta)$の満す方程式を計算すると次の様になる。

(1.3)の場合

(1.13) $$\frac{\partial Y}{\partial x}=\left\{x^{-2}E+x^{-1}F+G+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{H_{(\alpha_j)}}{x-\alpha_j}+\frac{H_{(\alpha_j^*)}}{x-\alpha_j^*}\right)\right\}Y$$

ただし，$G=\frac{i\xi}{2}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}$

$$E=\frac{-i\eta}{2}(|y_{1,0}|^2+|y_{2,0}|^2)^{-1}\begin{bmatrix}|y_{1,0}|^2-|y_{2,0}|^2 & -2y_{1,0}y_{2,0}^* \\ -2y_{1,0}^*y_{2,0} & |y_{2,0}|^2-|y_{1,0}|^2\end{bmatrix}$$

$$E=K\tilde{E}K^{-1}$$

$$\tilde{E}=\frac{-i\eta}{2}\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}, \quad K=\begin{bmatrix}y_{1,0} & y_{2,0}^* \\ -y_{2,0} & y_{1,0}^*\end{bmatrix}$$

$$F+\sum_{j=1}^{N}(H_{(\alpha_j)}+H_{(\alpha_j^*)})=\begin{bmatrix}N & -i\xi y_{2,N-1} \\ -i\xi y_{2,N-1} & N\end{bmatrix}$$

(1.4)の場合

(1.14) $$\frac{\partial Y}{\partial x}=\left\{xG+F+\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{H_{(\alpha_j)}}{x-\alpha_j}+\frac{H_{(\alpha_j^*)}}{x-\alpha_j^*}\right)\right\}Y$$

ただし，$G=\begin{bmatrix}-4i\eta & \\ & 4i\eta\end{bmatrix}$，$F=\begin{bmatrix}-i\xi & 8i\eta \\ 8i\eta y_{2,N-1} & i\xi\end{bmatrix}$，

$$\sum_{j=1}^{N}(H_{(\alpha_j)}+H_{(\alpha_j^*)})=(h_{\mu\nu})$$

$$h_{11}=N+8i\eta|y_{2,N-1}|^2,\qquad h_{22}=h_{11}^*$$

$$h_{21}=8i\eta y_{2,N-1}-8i\eta y_{1,N-1}y_{2,N-1}+2i\xi y_{2,N-1},\quad h_{12}=-h_{21}^*$$

(1.13), (1.14)の両方の場合について，$H_{(\alpha)}$ $(\alpha=\alpha_j,\alpha_j^*, j=1,\cdots,N)$ の固有値は，0と1である。

次に，(1.13), (1.14)の解の大域的接続構造を調べよう。(1.14)の場合についてのみ述べるが，(1.13)の接続構造も以下と同様に調べられる。

まず，$x=\infty$ における Stokes係数と形式モノドロミーについてであるが，これらは，ともに trivial である。又，$T_{(\alpha)}$, $Q_{(\alpha)}$を次の様にして定める。(ともに invertible である。)

(1.15) $H_{(\alpha)}=T_{(\alpha)}\,diag(0,1)T_{(\alpha)}^{-1}$,

$$Y(x,\xi,\eta)=T_{(\alpha)}Y_{(\alpha)}(x,\xi,\eta)Q_{(\alpha)}\qquad(\alpha=\alpha_j,\alpha_j^*,j=1,\cdots,N)$$

ここで，$Y_{(\alpha)}$は，(1.13)の $x=\alpha$ における正規化された行列解であり，

(1.16) $Y_{(\alpha)}(x,\xi,\eta)=(x-\alpha)^J\,\Phi_{(\alpha)}(x)(x-\alpha)^{\begin{pmatrix}0 & \\ l_{(\alpha)} & 0\end{pmatrix}}$,

$J=diag(0,1)$

又，$\Phi_{(\alpha)}(x)$ は $x=\alpha$の近傍で正則かつ $\Phi_{(\alpha)}(\alpha)=I$ という型をしている。ただし，今の場合では，$Y(x,\xi,\eta)$に logarithmic term がないから，$l_{(\alpha)}=0$ である。簡単な計

算により，$T_{(\alpha)}$ を上手に選ぶと，

(1.17) $Q_{(\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ & 1 \end{bmatrix}$.

$$c = c_j \text{ for } \alpha = \alpha_j, \quad c = -c_j^{*-1} \text{ for } \alpha = \alpha_j^*$$

となることが確認される。それ故，$Y(x, \xi, \eta)$ は，次の方程式を満さねばならない。(cf [2], [3])

(1.18) $dY = \widehat{\Omega} Y$.

ここで，$\widehat{\Omega}$ は，(1.13), (1.14) の係数を用いて，各々の場合に次の様に表わされる。

(1.13) の場合

(1.19) $\widehat{\Omega} = x\,dG + \{dG, F + \sum_{j=1}^{N} (H_{(\alpha_j)} + H_{(\alpha_j^*)})\}_G - x^{-1} K d\hat{E} K^{-1}$

(1.14) の場合

(1.20) $\widehat{\Omega} = x^2 \Phi + x \Psi + \Theta$

ただし，$\Phi = \frac{1}{2} dG$, $\quad \Psi = dF^{(+)} + \{\Phi, F\}_G$

$$\Theta = \{\Phi, \sum_{j=1}^{N} (H_{(\alpha_j)} + H_{(\alpha_j^*)})\}_G + \{\Psi, F\}_G + \frac{1}{2} \mathrm{diag}\left(f_{12} f_{21}\, d\left(\frac{1}{g_1 - g_2}\right), f_{21} f_{12}\, d\left(\frac{1}{g_2 - g_1}\right)\right)$$

$$G = \mathrm{diag}(g_1, g_2), \quad F = (f_{\mu\nu}), \quad F^{(+)} = \mathrm{diag}(f_1, f_2)$$

($A = (a_{\mu\nu})$ が与えられたとき，$\{A\}_G$ を

$$\{A\}_{G,\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu = \nu \\ \dfrac{a_{\mu\nu}}{g_\mu - g_\nu} & \mu \neq \nu \end{cases}$$

で定義し，$\{A, B\}_G = \{[A, B]\}_G$ とおく。)

(1.18)という方程式は，$Y(x,\xi,\eta)$ の（xに関する）大域的接続構造が，ξとηに依存しないという事実（モノドロミー保存変形!!）から従うものであり，$\tilde{\Omega}$は，(1.10)，(1.12)のΩと一致することも容易に確かめられる。(1.9)と(1.13)（resp. (1.11)と(1.14)）の積分可能条件を求めることにより，次の定理を得る。

定理１（[3]）（PLRの場合）K，F，$H_{(\alpha)}$は，次の完全積分可能な全微分方程式系をみたす。

$$
(1.21)\quad
\begin{aligned}
dK &= K\{d\hat{E}, K^{-1}FK\}_{\hat{E}} + \{dG, F+\textstyle\sum_\alpha H_{(\alpha)}\}_G K \\
dF &= [\Phi, E] + [\Psi, F] + [\Theta, G] - \textstyle\sum_\alpha \alpha^{-1}[\Theta, H_{(\alpha)}] \\
dH_{(\alpha)} &= [\Omega|_{x=\alpha}, H_{(\alpha)}] \qquad \alpha = \alpha_j, \alpha_j^*,\ j=1,\cdots,N
\end{aligned}
$$

ただし，$\Omega = \Phi x + \Psi + \Theta x^{-1}$,

$$\Phi = dG,\quad \Psi = \{dG, F+\textstyle\sum_\alpha H_{(\alpha)}\}_G,\quad \Theta = -K d\hat{E} K^{-1}$$

(1.21) は，PLRのN-ソリトン解を特徴付ける。

（NLSの場合）F，$H_{(\alpha)}$は，次の完全積分可能な全微分方程式系を満たす。

$$
(1.22)\quad
\begin{aligned}
dF &= \Psi + [\Theta, F] + \textstyle\sum_\alpha \alpha[\Phi, H_{(\alpha)}] + \sum_\alpha [\Psi, H_{(\alpha)}] \\
dH_{(\alpha)} &= [\Omega|_{x=\alpha}, H_{(\alpha)}], \qquad \alpha = \alpha_j, \alpha_j^*,\ j=1,\cdots,N
\end{aligned}
$$

（Ω，Φ，Ψ，Θは，(1.20)式で定義されている。）

(1.22) は，NLSの N-ソリトン解を特徴付ける。

§2. この節では，先に述べた#2の目標について考察する。(1.21), (1.22)は，変形の方程式と呼ばれるものであるが，我々は，この方程式が，各々，ハミルトン系として表現されることを述べたい。そこで，一般的に論じる為に，新たに対象となるべき方程式を書く。(E, K, F, G, H_j は 2x2行列とする。)

$$
\begin{aligned}
(2.1)\quad dK &= K\{d\hat{E}, K^{-1}FK\}_{\hat{E}} + \{dG, F+\sum_{j=1}^{N} H_j\}_G K \\
dF &= [\Phi, E] + [\Psi, F] + [\Theta, G] - \sum_{j=1}^{N} a_j^{-1}[\Theta, H_j] \\
dH_j &= [a_j\Phi + \Psi + a_j^{-1}\Theta, H_j], \qquad j = 1, \cdots, N
\end{aligned}
$$

ただし，$\Phi = dG$，$\Psi = \{dG, F+\sum_{j=1}^{N} H_j\}_G$,

$\Theta = -K d\hat{E} K^{-1}$, $\qquad E = K\hat{E}K^{-1}$,

$G = diag(g_1, g_2)\ (g_1 \neq g_2)$, $\hat{E} = diag(e_1, e_2)\ (e_1 \neq e_2)$

d は，g_1, g_2, e_1, e_2 に関する外微分.

a_j は互いに異なる定数

$$
\begin{aligned}
(2.2)\quad dF &= \Psi + [\Theta, F] + \sum_{j=1}^{N} a_j[\Phi, H_j] + \sum_{j=1}^{N}[\Psi, H_j] \\
dH_j &= [\Phi a_j^2 + \Psi a_j + \Theta, H_j], \qquad j = 1, \cdots, N
\end{aligned}
$$

ただし，$\Phi = \frac{1}{2}dG$，$\Psi = dF^{(+)} + \{\Phi, F\}_G$

$$
\Theta = \{\Phi, \sum_{j=1}^{N} H_j\}_G + \{\Psi, F\}_G + \frac{1}{2}diag\left(F_{12}F_{21}\, d\left(\frac{1}{g_1 - g_2}\right),\ F_{21}F_{12}\, d\left(\frac{1}{g_2 - g_1}\right)\right)
$$

$G = diag(g_1, g_2)$, $F = \begin{bmatrix} f_1 & F_{12} \\ F_{21} & f_2 \end{bmatrix}$, $(g_1 \neq g_2)$, $F^{(+)} = diag(f_1, f_2)$

dは，g_1, g_2, f_1, f_2に関する外微分

(2.1), (2.2) は，各々,次の微分方程式に対する変形の方程式である。(cf. [2])

$$(2.3) \quad \frac{dY}{dx} = \left\{ G + Fx^{-1} + Ex^{-2} + \sum_{j=1}^{N} \frac{H_j}{x-a_j} \right\} Y$$

$$(2.4) \quad \frac{dY}{dx} = \left\{ Gx + F + \sum_{j=1}^{N} \frac{H_j}{x-a_j} \right\} Y$$

$Y(x)$, $Z(x)$ を (2.3) の $x=\infty, 0$ で正規化された形式解とする。

$$(2.5) \quad Y(x) = \hat{Y}(x) x^{D^{(\infty)}} \exp(xG) \qquad (x=\infty \text{で正規化された形式解})$$

$$\hat{Y}(x) = I + \sum_{\ell=1}^{\infty} Y_\ell x^{-\ell}$$

$$(2.6) \quad Z(x) = \hat{Z}(x) x^{D^{(0)}} \exp(-x^{-1}\hat{E}) \qquad (x=0 \text{で正規化された形式解})$$

$$\hat{Z}(x) = I + \sum_{\ell=1}^{\infty} Z_\ell x^{\ell}$$

同様に，$Y(x)$を(2.4)の，$x=\infty$ で正規化された形式解とする。

$$(2.7) \quad Y(x) = \hat{Y}(x) x^{D} \exp\left(\tfrac{1}{2}x^2 G + xF^{(+)}\right)$$

$$\hat{Y}(x) = I + \sum_{\ell=1}^{\infty} Y_\ell x^{-\ell}$$

以上の準備のもとに，我々は，次の定理を得る。

<u>定理2. (</u>[3])　1-form ωを次の式によって定義する。

case (2.1)　$\omega = \mathrm{trace}(Z_1 d\hat{E} - Y_1 dG)$.

case (2.2)　$\omega = -\mathrm{trace}(Y_1 dF^{(+)} + Y_2 dG - \frac{1}{2} Y_1^2 dG)$

ここで，Y_1, Z_1 及び Y_1, Y_2 は各々 (2.5), (2.6), (2.7) の形式解の

展開才1項，及び，才2項である。さて，F, K, H_j の間の Poisson bracket を次によって導入する。

case (2.1) $\{(FK)_{\mu\nu}, (K^{-1})_{\mu'\nu'}\} = \delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'}$

$\{H_{j,\mu\nu}, H_{k,\mu'\nu'}\} = \delta_{jk}(\delta_{\mu\nu'}H_{j,\mu'\nu} - \delta_{\mu'\nu}H_{k,\mu\nu'})$

他の組み合わせは，すべて $=0$.

case (2.2) $\{\hat{F}_{12}, \hat{F}_{21}\} = 1$,

$\{H_{j,\mu\nu}, H_{k,\mu'\nu'}\} = \delta_{jk}(\delta_{\mu\nu'}H_{j,\mu'\nu} - \delta_{\mu'\nu}H_{k,\mu\nu'})$

他の組み合わせは，すべて $=0$

ただし，$\hat{F}_{\mu\nu} = (g_1 - g_2)^{\frac{1}{2}} F_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ である。このとき，(2.1), (2.2)は，各々，ω をハミルトニアン 1-form にもつハミルトニアン系として表現される。

case (2.1), $dK = \{K, \omega\}$, $dF = \{F, \omega\}$, $dH_j = \{H_j, \omega\}$, $1 \leqq j \leqq N$,

case (2.2) $d\hat{F} = \{\hat{F}, \omega\}$, $\hat{F} = \begin{pmatrix} & \hat{F}_{12} \\ \hat{F}_{21} & \end{pmatrix}$, $dH_j = \{H_j, \omega\}$, $1 \leqq j \leqq N$.

ハミルトニアン 1-form ω は (2.1), (2.2) の解に対して，closed になることが確認され，従って，

(2.8) $\omega = d \log \tau$

となる函数が存在する。我々は，この函数を"τ-function"と呼ぶ。それでは，(1.21), (1.22)の場合に，この τ-函数を計算してみると次のようになる。

(2.9) (PLR) $\tau(\xi, \eta) = \mathrm{const}\ e^{\frac{\xi\eta}{2}} \det W$

(NLS) $\tau(\xi,\eta) = const\ \det W$

ただし，Wは，各々の場合に，(1.8)で定義される $2N\times 2N$ 行列である。さらに，$N\times N$ 行列 $C=(C_{\mu\nu})$を

(2.10) $$C_{\mu\nu} = \frac{c_\mu}{\alpha_\mu-\alpha_\nu^*}\frac{g(\alpha_\mu)}{\dot{g}(\alpha_\nu^*)}e(\alpha_\mu)^{-1}e(\alpha_\nu^*)$$

ただし，$g(x)=\prod_{k=1}^{N}(x-\alpha_k^*)$，$\dot{g}=\frac{dg}{dx}$

によって定義すると，この場合のτ-函数の最終的表示を得る。

(2.11) (PLR) $\tau(\xi,\eta) = const\ e^{\frac{\xi\eta}{2}}\prod_{j=1}^{N}e(\alpha_j)e(\alpha_j^*)^{-1}\det(I+C^*C)$

(NLS) $\tau(\xi,\eta) = const\ \prod_{j=1}^{N}e(\alpha_j)e(\alpha_j^*)^{-1}\det(I+C^*C)$

ここで，C^*は，Cの複素共役である。ここで，$\det(I+C^*C)$は，各々，PLR，NLSをlinearizationするGelfand-Levitan-Marchenko方程式のFredholm行列式と一致する。(cf [4])
又，PLRの場合において $C^*=-C$ であるならば，それは，sine-Gordon方程式のN-ソリトン解に対するτ-functionに帰着する。

参考文献

[1] K. Ueno : RIMS preprint 301 (1979)

[2] K. Ueno ; RIMS preprint 302 (1979)

[3] K. Ueno : (to appear)

[4] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno ; (to appear)

[5] E. Date : Proc. Japan. Acad., 55 A 27–30 (1979)

[6] E. Date ; On a construction of multi-soliton solution of Pohlmeyer-Lund-Regge system and the classical massive Thirring model (preprint)

[7] F. Lund and T. Regge : Phys Rev. D. 14, 1524–1535 (1976)

[8] K. Pohlmeyer : Comm. Math. Phys., 46, 207–221 (1976)

[9] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. newell and H. Segur ; Stud. Appl. Math., 53, 249–315 (1974)

[10] K. Okamoto : Les Hamiltonian polynômiaux associes aux Equations de Painlevé (preprint)

[11] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri and M. Sato : Density matrix of impenetrable bose gas and the fifth Painlevé transcendent. RIMS preprint 303 (1979)